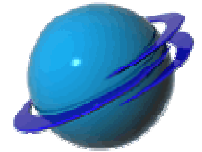


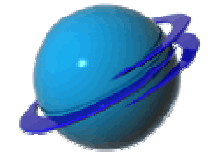
BAB I. SISTEM BILANGAN REAL



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

- Skema bilangan real
- Sifat urutan bilangan real
- Interval
- Pertidaksamaan real
- Pertidaksamaan mutlak

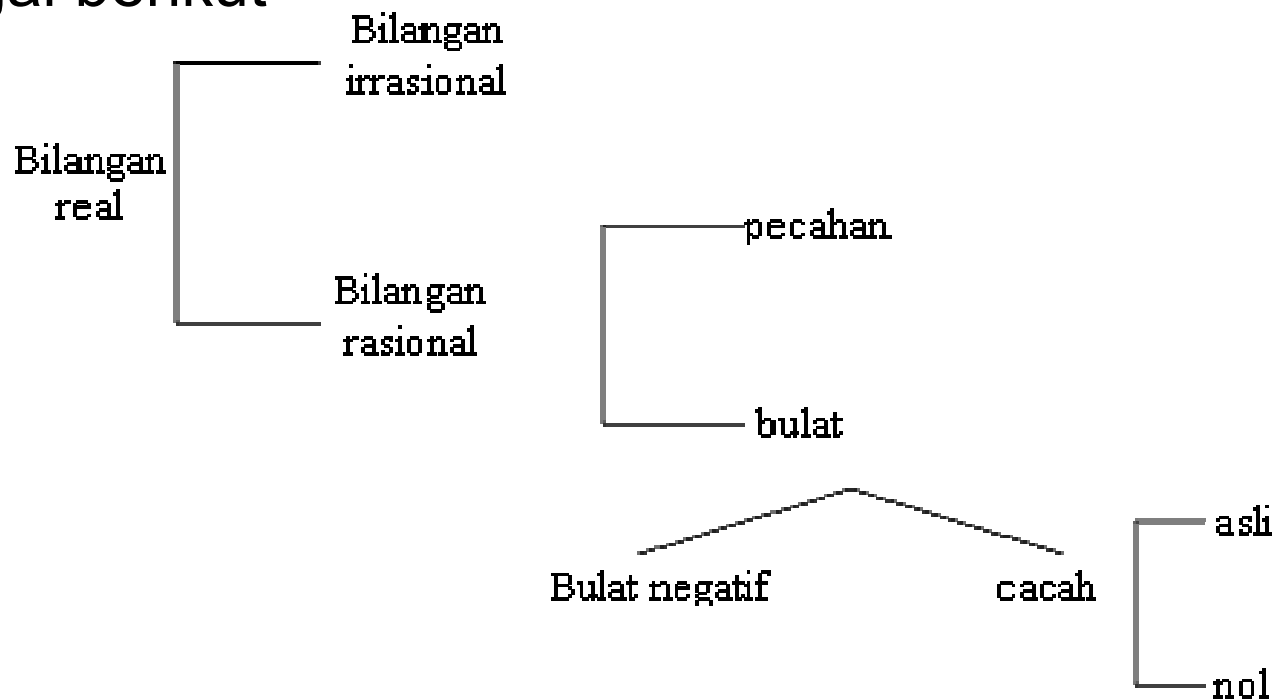
Skema bilangan real



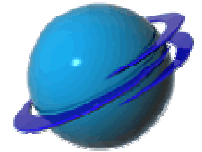
INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

Bilangan real dan sifat –sifatnya memegang peranan yang sangat penting dalam kalkulus

Skema dari komponen bilangan real dapat digambarkan sebagai berikut



Sifat urutan bilangan real



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

1. Trikotomi

Bila x dan y adalah suatu bilangan, maka pasti berlaku salah satu dari tiga berikut, yaitu $x < y$, atau $x > y$, atau $x = y$

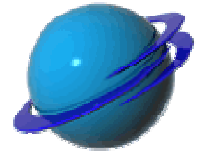
2. Ketransitifan

Bila x , y dan z suatu bilangan dan berlaku $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$

3. Perkalian

Bila z bilangan positif dan $x < y$, maka $xz < yz$, sedangkan bila z bilangan negatif, maka $xz > yz$

Interval



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

Misal dua bilangan a dan b serta berlaku sifat urutan $a < b$, digambarkan pada garis bilangan berikut

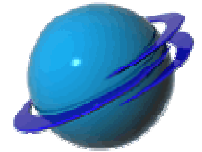


Interval yaitu suatu himpunan bagian dari bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan tertentu.

Definisi interval dan notasinya :

Definisi	Notasi	Definisi	Notasi
$\{ x \mid x < a \}$	$(-\infty, a)$	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$	$[a, b]$
$\{ x \mid x \leq a \}$	$(-\infty, a]$	$\{ x \mid x > b \}$	$(b, +\infty)$
$\{ x \mid a < x < b \}$	(a, b)	$\{ x \mid x \geq b \}$	$[b, +\infty)$

Pertidaksamaan real



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

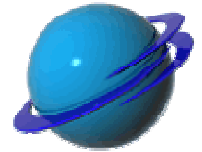
Definisi pertidaksamaan satu peubah yaitu bentuk aljabar dengan satu peubah yang dihubungkan dengan relasi urutan.

Bentuk umum :
$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)},$$

$A(x), B(x), C(x), D(x)$ adalah polinom-polinom

$$B(x) \neq 0, D(x) \neq 0$$

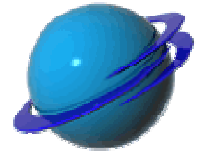
Langkah-langkah penyelesaian



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

1. Bentuk umum di atas diubah menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ dengan cara :
 - ruas kiri atau ruas kanan dinolkan
 - menyamakan penyebut dan menyederhanakan bentuk pembilangnya
2. Dicari titik –titik pemecah dari pembilang dan penyebut dengan cara menguraikan pembilang dan penyebut menjadi faktor –faktor linier dan/atau kudratik

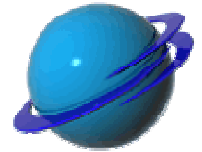
Langkah-langkah penyelesaian



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

3. Titik –titik pemecah tersebut digambarkan pada garis bilangan, kemudian pada setiap interval yang muncul ditentukan tanda + atau $-$. Jika faktornya kuadratik, pergantian interval tidak berubah tandanya, sedangkan untuk faktor linier, setiap pergantian interval tanda berubah.

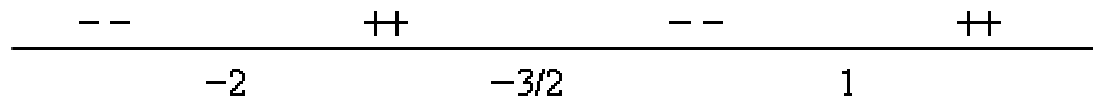
Contoh 1



1. Tentukan himpunan penyelesaian $\frac{6x^2 + 3x - 9}{2x + 4} \geq 0$

Titik-titik pemecah : $x = -\frac{3}{2}, x = 1, x = -2$

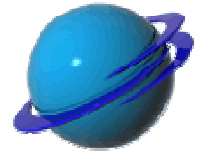
Titik-titik tersebut digambarkan dalam garis bilangan dengan tanda-tandanya sebagai berikut :



Dari garis bilangan tersebut, tanda yang sesuai dengan tanda relasi pertidaksamaannya menjadi himpunan penyelesaiannya yaitu

$$\left(-2, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$$

Contoh 2



2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{4}{x}$

Jawab :

$$\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{4}{x} \text{ diubah menjadi } \frac{x+2}{x-1} - \frac{4}{x} \leq 0$$

Setelah diuraikan menjadi $\frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)x} \leq 0$

$x^2 - 2x + 4$ merupakan pers. kuadrat yg definit positif,

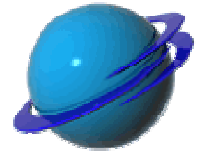
Maka titik-titik pemecahnya : $x = 1, x = 0$

Pada garis bilangan tampak sebagai berikut :



Jadi hp adalah $(0,1)$

Latihan



Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut :

$$1. \frac{2x + 4x + 7}{x - 2} \leq 0$$

$$2. \frac{x - 9}{2x + 1} \leq 0$$

$$3. 6x - 10 \geq 5x - 16$$

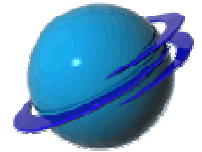
$$4. 2x^2 + 7x + 3 \geq 0$$

$$5. \frac{x + 2}{4 - 2x} \geq 1 - x$$

$$6. \frac{2x + 5}{x - 1} < \frac{x + 2}{x + 6}$$



Latihan

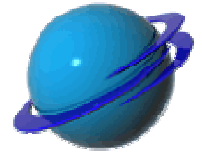


$$7. \quad x - 3 \leq 2x^2 + 4 \leq 10 \quad 8. \quad -3 < 2x + 3 < -1$$

$$9. \quad 2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$$

$$10. \quad 10x^2 - 4x \geq \frac{4x}{x+1}$$

Pertidaksamaan mutlak



Nilai mutlak $|x|$ didefinisikan sebagai jarak x dari titik asal pada garis bilangan.

Nilai mutlak didefinisikan sebagai $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Sifat-sifat nilai mutlak :

$$1. |x| = \sqrt{x^2}$$

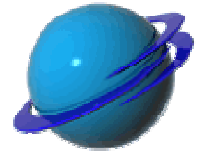
$$4. |x| \leq |y| \leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

$$2. |x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$5. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$3. |x| \geq a \leftrightarrow a \leq x \cup x \leq -a, \text{ a positif}$$

Contoh 1



Tentukan himpunan penyelesaian $|3x + 6| \leq 9$

Jawab :

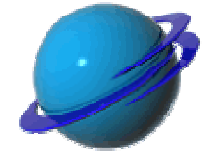
Bentuk pertidaksamaan tersebut sesuai dengan sifat kedua di atas, sehingga

$$-9 \leq 3x + 6 \leq 9$$

masing –masing ruas dikurangi dengan 6 kemudian dibagi dengan 3, diperoleh bahwa

$$-5 \leq x \leq 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $[-5, 1]$



Contoh 2

Tentukan hp dari $|4x + 1| \geq |x - 2|$

Karena memenuhi sifat keempat, maka

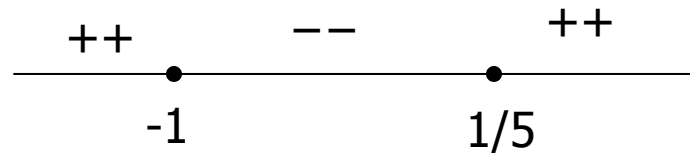
$$(4x + 1)^2 \geq (x - 2)^2$$

Setelah salah satu ruas dinolkan, diperoleh

$$(4x + 1)^2 - (x - 2)^2 \geq 0$$

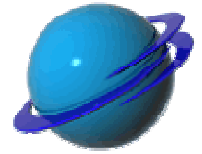
Titik-titik pemecah $x = \frac{1}{5}$, $x = -1$

Titik-titik tersebut digambarkan pada garis bilangan sebagai berikut



Jadi hpnya adalah $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{5}, \infty\right)$

Contoh 3



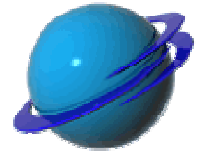
Tentukan hp dari $3 + |x - 1| > |x + 3|$

Jawab

Dengan definisi: $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ $|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -x - 3, & x < -3 \end{cases}$

$x < -3$	$-3 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$3 + (1 - x) > -x - 3$	$3 + (1 - x) > x + 3$	$3 + (x - 1) > x + 3$
$4 > -3 \rightarrow x \in \mathbb{R}$	$-2x > -1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$	$2 > 3 \rightarrow x = \{ \}$
Hp 1: $x < -3$	Hp 2: $[-3, \frac{1}{2})$	Hp 3: $\{ \}$

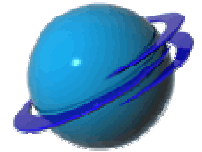
Jawaban Hp : $\text{Hp1} \cup \text{Hp2} \cup \text{Hp3} = (-\infty, \frac{1}{2})$



Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan mutlak berikut

- $x - 3 \leq 2x^2 + 4 \leq 10$
- $\frac{8}{|x + 1|} \geq |x + 2|$
- $2|x + 1| + x(x + 1) \leq 4$
- $2|x + 3| + |x + 1| \geq 2$
- $x < |x + 2| < 6$
- $|x - 1|^2 + 2|x - 1| \leq 2$

Latihan



INSTITUT TEKNOLOGI
TELKOM

$$7. \frac{|x-3|}{|x+1|} \leq 6$$

$$8. \frac{1}{|x+2|} < \frac{1}{|x+1|}$$

$$9. \frac{|x+2|}{|x-1|} \leq -2$$

$$10. \frac{|x+5|}{x-3} \leq |x-2|$$

$$11. |4x+3||x| \geq x$$